المتتاليات العددية

تمرين1

$$v_n = u_n - 5/3 \quad ; \quad u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n \quad ; \quad u_0 = 2$$

1- بين أن (v_n) هندسية ثم احسب v_n و u_n بدلالة n

2- احسب : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

الحل

بصفة عامة:

$$v_n = u_n - \frac{b}{b-a} \quad ; \quad u_{n+1} = 1 + \frac{a}{b}u_n \quad ; \quad u_0 = \alpha$$

نجد الأساس : $\frac{a}{b}$

- $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}(u_n - \frac{5}{3}) = \frac{2}{5}v_n$

$$v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n \qquad v_0 = \frac{1}{3}$$

$$u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} v_i = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}$$

تمرين2

$$u_0 = 0 \ ، \ u_{n+1} = \frac{16}{8-u_n} \ ، \ v_n = \frac{1}{u_n-4}$$

1- بين أن (v_n) حسابية ثم احسب v_n و u_n بدلالة n

2- احسب : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

الحل

بصفة عامة:

$$u_{n+1} = \frac{a^2}{2a-u_n} \qquad v_n = \frac{1}{u_n-a} \qquad u_0 = \alpha$$

نجد الأساس : $-\frac{1}{a}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-4} = \frac{1}{\frac{16}{8-u_n}-4} = \frac{1}{4}\frac{4-u_n}{u_n-4} + \frac{1}{4}\frac{4}{u_n-4} = -\frac{1}{4} + v_n$$

$$v_n = v_0 + nr = -\frac{1+n}{4} \qquad v_0 = -\frac{1}{4}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1})$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{n-1}{3}\right)\right) = \frac{n}{2}\left(-\frac{1}{6} - \frac{n}{3}\right)$$

تمرين3

1- $n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2- $n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

3- $n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}$

4- $n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \geq n+1$

5- $n \geq 3 \quad 2^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

6- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

7- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

9- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$

10- $(\forall t \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (t+1)^n \geq 1+nt$

11- $(\forall \varepsilon > 0) \ |a| < \varepsilon \Rightarrow a = 0$

الحل

2- $n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

3- $n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}$ التراجع أو

$$2^{n+1} = (1+1)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k \geq C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

4- $n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \geq n+1$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \geq C_n^0 + C_n^1 = 1+n$$

5- $n \geq 3 \quad 2^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \geq C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

6- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ التراجع

7- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ التراجع

8- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

نعلم أن : $\forall (x';y') \in \mathbb{R}^2 \quad |x'-y'| \leq |x'|+|y'|$

نضع: $x' = x-y \ ; \ y' = y$ ثم $x' = x \ ; \ y' = y-x$

نجد : $(1)\ |x|-|y| \leq |x-y|$ ثم $(2)\ |y|-|x| \leq |x-y|$

من : $(1);(2)$: $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

أو :

$$|x||y| \leq xy \Leftrightarrow -|x||y| \leq -xy$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \leq x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\Leftrightarrow \left[|x|+|y|\right]^2 \leq (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

9- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$

نعوض : $-y$ ب y في 8

10- $(\forall t \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (t+1)^n \geq 1+nt$

بالترجع :

$$(t+1)^{n+1} = (t+1)(t+1)^n \geq (t+1)(1+nt)$$

$$(t+1)(1+nt)=t+(n+1)t+nt^2\geq(n+1)t$$

11- $(\forall\varepsilon>0)\ |a|<\varepsilon\Rightarrow a=0$

نفترض أن : $a\neq0$

نعتبر : $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$ **إذن :** $|a|<\frac{|a|}{2}$ **و منه :** $1<\frac{1}{2}$ **تناقض**

تمرين4

$$n\geq1\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times2^k}$$

1 – بين أن : $u_n\leq1$

2- استنتج أن : $(u_n)_{n\geq1}$ **متقاربة**

الحل

1 – لنبين أن : $u_n\leq1$

$$n\geq1\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times2^k}$$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times2^k}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$u_n=1-\frac{1}{n+1}\leq1$$

-2 $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}$

إذن : $(u_n)_{n\geq1}$ **تزايدية**

بما أن : $(u_n)_{n\geq1}$ **تزايدية مكبورة فإن** $(u_n)_{n\geq1}$ **متقاربة**

تمرين5

$$n\geq1\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

1 – بين أن : $u_n\leq2$

2- استنتج أن : $(u_n)_{n\geq1}$ **متقاربة**

الحل

$$n\geq1\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

1 – لنبين أن : $u_n\leq2$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}$$

إذن : $u_n\leq2$

-2 **بما أن :** $(u_n)_{n\geq1}$ **تزايدية مكبورة فإن** $(u_n)_{n\geq1}$ **متقاربة**

تمرين6

حساب : $\lim u_n$

1 - $u_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k}\quad n\geq1$

$$\frac{1}{n^2+2n+1}\leq\frac{1}{n^2+k}\leq\frac{1}{n^2+1}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+2n+1}\leq\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k}\leq\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2n+1}{n^2+2n+1}\leq u_n\leq\frac{2n+1}{n^2+1}$$

إذن : $0\leq\lim u_n\leq0$ **و منه :** $\lim u_n=0$

-2 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\quad n\geq1$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

إذن : $\lim u_n=1$

- 3 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2+kn+k^2}{n^3}\quad n\geq1$

$$\frac{n^2+kn+k^2}{n^3}=\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$

$$u_n=1+\frac{n(n+1)}{2n^2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\frac{11}{6}$$

-4 $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=1}^{n}k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\quad n\geq1$

بما أن : $-1<\frac{1}{2}<1$ **فإن :** $\lim u_n=0$

تمرين7

f **دالة معرفة على مجال** I **بحيث :** $f(I)\subset I$

1- ادرس رتابة f^k **(مركبة** f k **مرة)** $k\in\mathbb{N}^*$

أ - إذا كان : f **تزايدية**

ب - إذا كان : f **تناقصية**

2- نعتبر المتتالية : (u_n)

بحيث: $u_{n+1}=f(u_n)\quad u_0\in I$

$v_n=u_{2n}$ ، $w_n=u_{2n+1}$

بين أن :

أ- إذا كان : f **تزايدية على** I **فإن :** (u_n)**رتيبة**

ب - إذا كان : f **تناقصية على** I **فإن :** (v_n)**رتيبة**

ج - إذا كان : f **تناقصية على** I **فإن :** (w_n)**رتيبة**

د - $\lim v_n=\lim w_n=l\Leftrightarrow\lim u_n=l\ \ (l\in\mathbb{R})$

3- تطبيق :

a- نعتبر : $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{u_n+1}$ ، $n\in\mathbb{N}$

أ- ادرس رتابة : (v_n) ؛ (w_n)

ب- بين أن : $w_n \le v_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج - بين أن : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

د - بين أن : $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

هـ - بين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان ثم حدد نهايتهما

و - استنتج أن : (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

الحل

f دالة معرفة على مجال I بحيث : $f(I)\subset I$

1- رتابة f^k (مركبة f k مرة) $k\in\mathbb{N}^*$

أ - إذا كان : f تزايدية فإن : f^k تزايدية

ب - إذا كان : f تناقصية فإن : f^{2k} تزايدية

و f^{2k+1} تناقصية

-2 $u_0\in I$ $u_{n+1}=f(u_n)$

$v_n=u_{2n} \Rightarrow v_{n+1}=f\circ f(v_n)$

$w_n=w_{2n+1} \Rightarrow w_{n+1}=f\circ f(w_n)$

بما أن : $u_0\in I$ و $f(I)\subset I$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

نبين بالترجع أن : $u_n\in I$

نفس الشيء بالنسبة ل : (v_n) و (w_n)

أ- إذا كان : f تزايدية على I فإن : (u_n) رتيبة

نفترض أن : $u_0\le u_1$

لنبين أن : (u_n) تزايدية بالترجع

لدينا : $u_0\le u_1$

نفترض أن : $u_n\le u_{n+1}$ بما أن : f تزايدية على I و $u_n\in I$

فإن : $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ إذن : $u_{n+1}\le u_{n+2}$

ب - إذا كان : f تناقصية على I فإن : (v_n) رتيبة

نطبق أ على $f\circ f$ و (v_n)

ج - إذا كان : f تناقصية على I فإن : (w_n) رتيبة

نطبق أ على $f\circ f$ و (w_n)

د - $\lim v_n=\lim w_n=l \Leftrightarrow \lim u_n=l$ $(l\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow$

نعتبر : $\varepsilon>0$

$(\exists n_1\in\mathbb{N})\ (k\ge n_1)\ |v_k-l|\le\varepsilon$

$(\exists n_2\in\mathbb{N})\ (k\ge n_2)\ |w_k-l|\le\varepsilon$

إذن : $(\exists n_1\in\mathbb{N})\ (2k\ge 2n_1)\ |u_{2k}-l|\le\varepsilon$

$(\exists n_2\in\mathbb{N})\ (2k+1\ge 2n_2+)\ |u_{2k+1}-l|\le\varepsilon$

نعتبر : $N=\sup(2n_1;2n_2+1)$

إذن : $(\exists N\in\mathbb{N})\ (k\ge N)\ |u_k-l|\le\varepsilon$

$\Leftarrow$

نعتبر : $\varepsilon>0$

$(\exists n_1\in\mathbb{N})\ (k\ge n_1)\ |u_k-l|\le\varepsilon$

إذن : $(\exists n_1\in\mathbb{N})\ (2k\ge n_1)\ |u_{2k}-l|\le\varepsilon$

$(\exists n_1\in\mathbb{N})\left(k\ge\frac{n_1}{2}\right)\ |u_{2k}-l|\le\varepsilon$

نعتبر : $N=E\left(\frac{n_1}{2}\right)+1$

إذا كان : $k\ge E\left(\frac{n_1}{2}\right)+1$ فإن : $k\ge\frac{n_1}{2}$

إذن : $(\exists N\in\mathbb{N})\ (k\ge N)\ |u_{2k}-l|\le\varepsilon$

و منه : $(\exists N\in\mathbb{N})\ (k\ge N)\ |v_k-l|\le\varepsilon$

نفس البرهنة بالنسبة ل : (w_n)

3- تطبيق :

نعتبر : $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{u_n+1}$ ، $n\in\mathbb{N}$

نعتبر : $f(x)=\frac{1}{1+x}$ $\left(D_f=\mathbb{R}-\{-1\}\right)$

$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$

f تناقصية

$u_0=1;u_1=\frac{1}{2};u_2=\frac{2}{3};u_3=\frac{3}{5}$

أ- رتابة : (v_n) ؛ (w_n)

$v_0\ge v_1$

بالترجع نبين أن : (v_n) تناقصية

لدينا : $v_0\ge v_1$

نفترض أن : $v_n\ge v_{n+1}$

بما أن : f تناقصية على $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن : $f\circ f$ تزايدية على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $u_n\in\mathbb{R}-\{-1\}$

فإن : $f\circ f(v_n)\ge f\circ f(v_{n+1})$ إذن : $v_{n+1}\ge v_{n+2}$

إذن : (v_n) تناقصية

بنفس الطريقة نجد : (w_n) تزايدية

ب- بين أن : $w_n\le v_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

بالترجع :

لدينا : $w_0\le v_0$

نفترض أن : $w_n\le v_n$

إذن : $f\circ f(w_n)\le f\circ f(v_n)$

و منه : $w_{n+1}\le v_{n+1}$

ج - لنبين أن : $\frac{1}{2}\le u_n \le 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

بالترجع :

لدينا : $\frac{1}{2}\le u_0\le 1$

نفترض أن : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

بما أن : f تناقصية على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $u_n\in\mathbb{R}-\{-1\}$

فإن : $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge f(u)_n \ge f(1)$

و منه : $\frac{2}{3}\ge u_{n+1}\ge\frac{1}{2}$

إذن : $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$

د - بين أن : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

بالترجع :

لدينا : $|u_2-u_1|=\frac{1}{6}$ ؛ $\frac{1}{6}\le\frac{1}{2}$

إذن : $|u_2-u_1|\le\frac{1}{2}$

نفترض أن : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$

$$|u_{n+2}-u_{n+1}|=\frac{|u_{n+1}-u_n|}{|1+u_n||1+u_{n+1}|}$$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+u_n}\le\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\le\frac{1}{1+u_{n+1}}\le\frac{2}{3}$$

إذن : $\frac{|u_{n+1}-u_n|}{|1+u_n||1+u_{n+1}|}\le\frac{1}{n}\times\frac{4}{9}$ و $\frac{1}{n}\times\frac{4}{9}\le\frac{1}{n+1}$

إذن : $\frac{|u_{n+1}-u_n|}{|1+u_n||1+u_{n+1}|}\le\frac{1}{n+1}$

و منه : $|u_{n+2}-u_{n+1}|\le\frac{1}{n+1}$

هـ - لنبين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان ثم نحدد نهايتهما

من 3-د لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $|u_{2n+1}-u_{2n}|\le\frac{1}{2n}$

و منه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $v_n-w_n\le\frac{1}{2n}$

إذن : $\lim(v_n-w_n)=0$

و لدينا : (w_n) تزايدية و (v_n) تناقصية

إذن : (v_n) و (w_n) متحاديتان

نعتبر : $\lim v_n=\lim w_n=l$

بما أن : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

فإن : $\frac{1}{2}\le w_n\le 1\ ;\ \frac{1}{2}\le v_n\le 1$

إذن : $\frac{1}{2}\le l\le 1$

لدينا : $w_n=f(v_n)$

و f متصلة في l و $\lim v_n=l$

إذن : $\lim w_n=f(\lim v_n)$

و منه : $l=f(l)$

نجد : $l=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $l=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

بما أن : $\frac{1}{2}\le l\le 1$

فإن : $l=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

إذن : $\lim v_n=\lim w_n=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

و - استنتج أن : (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

من 2- د - $\lim v_n=\lim w_n=l \Leftrightarrow \lim u_n=l$ $(l\in\mathbb{R})$

إذن : $\lim u_n=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

تمرين8

نعتبر : $u_0=1$ ، $u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n+1}$ ، $n\in\mathbb{N}$

$v_n=u_{2n}$ ؛ $w_n=u_{2n+1}$

أ- ادرس رتابة (v_n) ؛ (w_n)

ب- بين أن : $v_n\le w_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج - بين أن : $1\le u_n\le\frac{3}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

د - بين أن : $|u_{n+1}-u_n|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

هـ - بين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان ثم حدد نهايتهما

و - استنتج أن : (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

الحل

نعتبر : $f(x)=1+\frac{1}{1+x}$ $(D_f=\mathbb{R}-\{-1\})$

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

f تناقصية

$u_0=1; u_1=\frac{3}{2}; u_2=\frac{7}{5}; u_3=\frac{17}{12}$

أ- رتابة : (v_n) ؛ (w_n)

$v_0 \le v_1$

بالترجع نبين أن : (v_n) تزايدية

لدينا : $v_0 \le v_1$

نفترض أن : $v_n \le v_{n+1}$

بما أن : f تناقصية على $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن : $f\circ f$ تزايدية على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $u_n \in \mathbb{R}-\{-1\}$

فإن : $f\circ f(v_n) \le f\circ f(v_{n+1})$ إذن : $v_{n+1} \le v_{n+2}$

إذن : (v_n) تزايدية

بنفس الطريقة نجد : (w_n) تناقصية

ب- بين أن : $v_n \le w_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

بالترجع :

لدينا : $v_0 \le w_0$

نفترض أن : $v_n \le w_n$

إذن : $f\circ f(v_n) \le f\circ f(w_n)$

و منه : $v_{n+1} \le w_{n+1}$

ج - لنبين أن : $1 \le u_n \le \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

بالترجع :

لدينا : $1 \le u_0 \le \frac{3}{2}$

نفترض أن : $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$

بما أن : f تناقصية على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $u_n \in \mathbb{R}-\{-1\}$

فإن : $f(1) \ge f(u_n) \ge f\left(\frac{3}{2}\right)$

و منه : $\frac{3}{2} \ge u_{n+1} \ge \frac{7}{5}$

إذن : $1 \le u_{n+1} \le \frac{3}{2}$

د - بين أن : $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

بالترجع :

لدينا : $|u_2-u_1| = \frac{1}{10}$ ؛ $\frac{1}{10} \le \left(\frac{1}{4}\right)^1$

إذن : $|u_2-u_1| \le \left(\frac{1}{4}\right)^1$

نفترض أن : $|u_{n+1}-u_n| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$|u_{n+2}-u_{n+1}| = \frac{|u_{n+1}-u_n|}{|1+u_n||1+u_{n+1}|}$$

$$\frac{2}{5} \le \frac{1}{1+u_n} \le \frac{1}{2} \; ; \; \frac{2}{5} \le \frac{1}{1+u_{n+1}} \le \frac{1}{2}$$

إذن : $\frac{|u_{n+1}-u_n|}{|1+u_n||1+u_{n+1}|} \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

إذن : $\frac{|u_{n+1}-u_n|}{|1+u_n||1+u_{n+1}|} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

و منه : $|u_{n+2}-u_{n+1}| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

هـ - لنبين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان ثم نحدد نهايتهما

من د لدينا : $|u_{n+1}-u_n| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $|u_{2n+1}-u_{2n}| \le \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

و منه : $|v_n - w_n| \le \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $\lim(v_n - w_n) = 0$

و لدينا : (w_n) تناقصية و (v_n) تزايدية

إذن : (v_n) و (w_n) متحاديتان

نعتبر : $\lim v_n = \lim w_n = l$

بما أن : $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$

فإن : $1 \le v_n \le \frac{3}{2}; 1 \le w_n \le \frac{3}{2}$

إذن : $1 \le l \le \frac{3}{2}$

لدينا : $w_n = f(v_n)$

و f متصلة في l و $\lim v_n = l$

إذن : $\lim w_n = f(\lim v_n)$

و منه : $l = f(l)$

نجد : $l = -\sqrt{2} \; ; \; l = \sqrt{2}$

بما أن : $1 \le l \le \frac{3}{2}$

فإن : $l = \sqrt{2}$

إذن : $\lim v_n = \lim w_n = \sqrt{2}$

و - استنتج أن : (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

من التمرين 7 2- د -

$\lim v_n = \lim w_n = l \Leftrightarrow \lim u_n = l \;(l \in \mathbb{R})$

إذن : $\lim u_n = \sqrt{2}$

تمرين9

$k \in \mathbb{R}; k \geq 1$

نعتبر : $u_0 = k$ ، $u_{n+1} = k + \frac{1}{u_n}$ ، $n \in \mathbb{N}$

$v_n = u_{2n}$ ؛ $w_n = u_{2n+1}$

أ - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad k \leq u_n < k+1$

ب- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \leq w_n$

ج- بين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان

ثم حدد نهايتهما α

د - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha|$

هـ - بين أن : $\lim u_n = \alpha$

الحل

نعتبر : $f(x) = k + \frac{1}{x} \quad (D_f = \mathbb{R}^*)$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

f تناقصية

$u_0 = k; u_1 = \frac{k^2+1}{k}; u_2 = \frac{k^3+2k}{k^2+1}; u_3 = \frac{k^4+3k^2+1}{k^3+2k}$

أ - لنبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad k \leq u_n \leq k+1$

بالترجع :

لدينا : $k \leq u_0 \leq k+1$

نفترض أن : $k \leq u_0 \leq k+1$

بما أن : f تناقصية على $\mathbb{R}^*$ و $[k; k+1] \subset \mathbb{R}^*$

فإن : $f(k) \geq f(u_n) \geq f(k+1)$

و منه : $k+1 \geq \frac{k^2+1}{k} \geq u_{n+1} \geq \frac{k^3+2k}{k^2+1} \geq k$

إذن : $k \leq u_{n+1} \leq k+1$

ب- لنبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \leq w_n$

بالترجع :

لدينا : $v_0 \leq w_0$

نفترض أن : $v_n \leq w_n$

إذن : $f \circ f(v_n) \leq f \circ f(w_n)$

و منه : $v_{n+1} \leq w_{n+1}$

ج- رتابة : (v_n) ؛ (w_n)

$v_0 \leq v_1$

بالترجع نبين أن : (v_n) تزايدية

لدينا : $v_0 \leq v_1$

نفترض أن : $v_n \leq v_{n+1}$

بما أن : f تناقصية على $\mathbb{R}^*$ فإن : $f \circ f$ تزايدية على $\mathbb{R}^*$ و $u_n \in \mathbb{R}^*$

فإن : $f \circ f(v_n) \leq f \circ f(v_{n+1})$ إذن : $v_{n+1} \leq v_{n+2}$

إذن : (v_n) تزايدية

بنفس الطريقة نجد : (w_n) تناقصية

- لنبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^n$

بالترجع :

لدينا : $|u_2 - u_1| = \frac{1}{k}$

إذن : $|u_2 - u_1| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^1$

نفترض أن : $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^n$

$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \frac{|u_{n+1} - u_n|}{|u_n||u_{n+1}|}$

$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{k} \; ; \; \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{1+u_{n+1}} \leq \frac{1}{k}$

إذن : $\frac{|u_{n+1} - u_n|}{|u_n||u_{n+1}|} \leq \left(\frac{1}{k}\right)^n \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{k}$

إذن : $\frac{|u_{n+1} - u_n|}{|u_n||u_{n+1}|} \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{n+1}$

و منه : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{n+1}$

- لنبين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان ثم نحدد نهايتهما

من د لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^n$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{2n}$

و منه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |v_n - w_n| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{2n}$

بما أن : $(k > 1)$

فإن : $\lim (v_n - w_n) = 0$

و لدينا : (w_n) تناقصية و (v_n) تزايدية

إذن : (v_n) و (w_n) متحاديتان

نعتبر : $\lim v_n = \lim w_n = l$

بما أن : $k \leq u_n \leq k+1$

فإن : $k \le v_n \le k+1 ; k \le w_n \le k+1$

إذن : $k \le l \le k+1$

لدينا : $w_n = f(v_n)$

و f متصلة في l و $\lim v_n = l$

إذن : $\lim w_n = f(\lim v_n)$

و منه : $l = f(l)$

نجد : $l = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$; $l = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$

بما أن : $k \le l \le k+1$

فإن : $l = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$

إذن : $\lim v_n = \lim w_n = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$

د - بين أن : $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k-\alpha|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

بالترجع :

$$|u_0-\alpha| = |k-\alpha| \le \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^0 |k-\alpha|$$

نفترض أن : $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k-\alpha|$

لدينا : $\alpha = f(\alpha)$

$$|u_{n+1}-\alpha| = \left|k+\frac{1}{u_n} - \left(k+\frac{1}{\alpha}\right)\right| = \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{u_n-\alpha}{u_n\alpha}\right|$$

$$|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n \frac{1}{u_n\alpha}|k-\alpha|$$

إذن : $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^{n+1} |k-\alpha|$

هـ - استنتاج أن : (u_n) متقاربة ثم تحديد نهايتها

$1<k\le \alpha\le k+1$

و منه : $\alpha k>1$

إذن : $\lim|u_n-\alpha| \le \lim\left(\left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n|k-\alpha|\right)$

إذن : $\lim|u_n-\alpha|\le 0$

و منه : $\lim u_n = \alpha$

تمرين10

بين أن : (u_n) و (v_n) متحاديتان

-1 $u_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ $n\ge1$ و $v_n = u_n+\frac{1}{n}$

-2 $u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ $n\ge2$ و $v_n=u_n+\frac{1}{3n^2}$

-3 $u_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $n\ge1$ و $v_n=u_n+\frac{1}{nn!}$

تمرين11

نعتبر : $u_0=-\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}}-1$ ، $n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن : $-1<u_n<0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن : (u_n) تناقصية

ج - بين أن : (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

الحل

نعتبر : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$ $(D_f=\mathbb{R}^*)$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

f تزايدية على $]-\infty;1]$

أ- لنبين أن : $-1<u_n<0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

بالترجع : $-1<u_0=-\frac{1}{2}<0$

نفترض أن : $-1<u_n<0$

بما أن : f تزايدية على $]-\infty;1]$ و $]-1;0[\subset]-\infty;1]$

فإن : $f(-1)<f(u_n)<f(0)$

و منه : $-1<u_{n+1}<0$

ب- لنبين أن : (u_n) تناقصية

بالترجع :

لدينا : $u_0=-\frac{1}{2} ; u_1=\frac{1}{\sqrt{5}}-1$

إذن : $u_1\le u_0$

نفترض أن : $u_{n+1}\le u_n$

إذن : $f(u_{n+1})\le f(u_n)$

و منه : $u_{n+2}\le u_{n+1}$

ج - لنبين أن : : (u_n) متقاربة ثم نحدد نهايتها

بما أن : (u_n) تناقصية مغورة فإن (u_n) متقاربة

نعتبر : $\lim u_n = l$

بما أن : $-1<u_n<0$

فإن : $-1<l<0$

لدينا: $f(u_n)=u_{n+1}$ و f متصلة على $[-1;0]$

و $f([-1;0])\subset[-1;0]$

إذن :

$f(l)=l$

نجد : $l=0$; $l=-1$

بما أن : (u_n) تناقصية فإن : $u_n < u_0 = -\frac{1}{2}$

إذن : $l \le -\frac{1}{2}$ و منه : $l = -1$

إذن : $\lim u_n = -1$

تمرين12

$u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ ، $n \in \mathbb{N}$

1- ادرس رتابة

2- بين أن غير مكبورة استعمل برهانا بالخلف

3- استنتج

الحل

1- (u_n) تزايدية

2- نفترض أن : (u_n) مكبورة

إذن : (u_n) متقاربة

نعتبر : $\lim u_n = l \quad (1)$

نعتبر : $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (D_f = \mathbb{R}^*)$

f متصلة على : $[1;+\infty[\quad (2)$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

f تزايدية على : $[1;+\infty[$

$u_n \in [1;+\infty[$ لأن $u_n \ge u_0 \ge 1$

$$f([1;+\infty[) = [2;+\infty[$$

إذن : $f([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[\quad (3)$

ولدينا : $f(u_n) = u_{n+1} \quad (4)$

من : $(1) ; (2) ; (3) ; (4)$: $f(l) = l$

$f(l) = l \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{l}$ تناقض مع $\frac{1}{l} \neq 0$

إذن : (u_n) غير مكبورة

3- بما أن : (u_n) تزايدية غير مكبورة

فإن : $\lim u_n = +\infty$

تمرين13

نعتبر :

$u_0 = -1$ ، $u_1 = 1$ ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ ، $n \in \mathbb{N}$

$v_n = 2^n u_n$ ؛ $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1- بين أن (w_n) هندسية ثم احسب w_n بدلالة n

2- بين أن (v_n) حسابية ثم احسب v_n بدلالة n

3- احسب u_n بدلالة n

4- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n \ge n$

5- حدد : $\lim \frac{n}{2^n}$ ثم استنتج : $\lim u_n$

الحل

1- لنبين أن (w_n) هندسية

$$w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$$
$$= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$$
$$\boxed{w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n}$$
$$w_0 = \frac{3}{2}$$

(w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ حدها الأول $\frac{3}{2}$

$$w_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2- لنبين أن (v_n) حسابية

$$v_{n+2} = 2^{n+2}u_{n+2}$$
$$= 2^{n+2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right)$$
$$= 2 \times 2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n$$
$$= 2v_{n+1} - v_n$$

إذن : $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n = \cdots = v_1 - v_0 = 2 + 1 = 3$

(v_n) حسابية أساسها 3 حدها الأول -1

$$v_n = -1 + 3n$$

3- حساب u_n بدلالة n

$$\boxed{u_n = \frac{-1+3n}{2^n}}$$

4- لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n \ge n$

بالترجع :

5- تحديد : $\lim \frac{n}{2^n}$ ثم استنتاج : $\lim u_n$

$$\frac{n}{2^n} \le \frac{1}{2^n} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

إذن : $\lim \frac{n}{2^n} = 0$

$$\lim u_n = \lim \frac{-1+3n}{2^n} = \lim \frac{-1}{2^n} + \lim \frac{3n}{2^n} = 0 + 0$$

$\boxed{\lim u_n = 0}$

تمرين14

نعتبر الدالة العددية $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

$u_0=1$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $n\in\mathbb{N}$

$v_0=2$ ، $v_{n+1}=f(v_n)$ ، $n\in\mathbb{N}$

$I=[1;2]$

1- بين أن : $f(I)\subset I$

2- بين أن : $(u_n)\subset I$ ؛ $(v_n)\subset I$

3- بين أن : (u_n) تزايدية و أن (u_n) تناقصية

4- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |v_n-u_n|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

5- بين أن : (v_n) و (w_n) متحاديتان ثم حدد نهايتهما

الحل

5- لنبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |v_n-u_n|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

بالترجع :

$$|v_{n+1}-u_{n+1}|\le\frac{|v_n-u_n|}{|u_n+1||v_n+1|}\le\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Exercice15 $\quad \alpha\in\left]0;\pi\right[$

soit $(u_n)_{n\ge1}$ **la suite définie par :**

$$u_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

1-montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ **est décroissante et minorée et déduire qu'elle est convergente**

2- montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$ **et**

en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$

Solution

On a $\alpha\in\left]0;\pi\right[$ **et** $n\ge1$ **donc** $\frac{\alpha}{2^2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Alors : $0<\cos(\alpha)<1\ et\ 0<\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)<1$

Donc : $0<u_n<1$

$u_{n+1}=u_n\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ **; puisque :** $0<\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)<1$

On a : $u_{n+1}\le u_n$

Donc : $(u_n)_{n\ge1}$ **est décroissante**

Et puisque : $(u_n)_{n\ge1}$ **minorée par** 0

$(u_n)_{n\ge1}$ **est convergente**

2- montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

Par récurrence :

montrons que : $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin(\alpha)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

On sait que : $\sin(\alpha)=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin(\alpha)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Supposons que : $u_n=\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

$$u_{n+1}=u_n\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=2\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$$

Donc : $u_{n+1}=\frac{\sin(\alpha)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$

On sait que : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{1}{x}}$

$$\lim 2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=\alpha\lim\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\frac{\alpha}{2^n}}=\alpha$$

Donc : $\lim u_n=\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$